UN CRITERIO DE ROTURA EN ENTALLAS EN V APLICABLE A MATERIALES FRAGILES.

F. J. Gómez y M. Elices

Departamento de Ciencia de Materiales
Universidad Politécnica de Madrid
E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. c/ Profesor Aranguren s/n, 28040 Madrid

Resumen. El objetivo de la presente comunicación es explicar y justificar a partir de la teoría de la fisura cohesiva un criterio de rotura en entallas en V, obtenido recientemente por los propios autores de forma experimental. Debido a la singularidad tensional que existe en las entallas en V, la rotura se produce cuando el factor de intensidad de tensiones generalizado alcanza un valor crítico función del material y del ángulo de entalla. Este valor crítico se puede obtener de forma experimental o analíticamente, siguiendo el procedimiento desarrollado en este trabajo, a partir del valor de la tenacidad del material y de la longitud característica del material. El método estudiado es aplicable a sólidos entallados de materiales frágiles en los que la rotura se produce en régimen elástico lineal.

Abstract. The purpose of this paper is explained with the cohesive zone model a failure criterion obtained by the authors for V-notched geometries. The stress singularity at the tip of the notch permits to establish that failure begins when the generalized stress intensity factor reach a critical value. The critical value or generalized toughness depends on the material and the notch angle and could be obtained experimentally. In this paper a new analytical method to obtain the generalized toughness based on the cohesive zone model is developed. The application of the criterion needs the toughness and the characteristic length of the cohesive zone model. This criterion applies for materials that can be modelled as cohesive materials and for large geometries.

1. INTRODUCCIÓN

Las entallas en arista viva o entallas en V, al igual que las fisuras, presentan una singularidad tensional en las proximidades de la raíz de la entalla. Debido al carácter singular, las tensiones en esta zona están determinadas por un único factor, denominado factor de intensidad de tensiones generalizado K_I^V, y la rotura se puede caracterizar mediante una única magnitud física, denominada tenacidad generalizada K_{IC}^V, que depende del material y del ángulo de entalla. En entallas en V, suponiendo que la rotura se produce en régimen elástico lineal, es aplicable un criterio de rotura basado en el factor de intensidad de tensiones generalizado [1, 2], similar al criterio clásico de Irwin en fisuras.

$$K_I^V = K_{IC}^V(\beta) \qquad (1)$$

La aplicación del criterio requiere conocer la función $K_{IC}^V(\beta)$. Esta función se puede obtener experimentalmente realizando un ensayo de rotura para cada ángulo de entalla, o numéricamente a partir de teorías y criterios de rotura locales, como la teoría de la fisura cohesiva. Los autores han aplicado esta última para obtener la función tenacidad generalizada en varios materiales (PMMA, PVC, aluminio, y acero de herramientas) [3]. Además han observado que con una adecuada adimensionalización de la curva tenacidad generalizada versus ángulo de entalla, se obtiene una función única independiente del material [3]. El factor de adimensionalización es función de la tenacidad del material K_{IC} y de la longitud característica l_{ch}, propia del modelo cohesivo.

El objetivo de este artículo es explicar y justificar analíticamente este resultado aplicando la teoría de la fisura cohesiva a sólidos elásticos entallados en V cuyas dimensiones son mucho mayores que la longitud característica del material. Siguiendo el procedimiento que se describe en los próximos apartados se obtiene además la función universal. Al final del artículo se propone una expresión aproximada de dicha función, que en principio permitiría obtener la tenacidad generalizada $K_{IC}^V(\beta)$ en cualquier material con una longitud característica relativamente pequeña a partir de la longitud característica l_{ch} y de tenacidad K_{IC}.

2. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA FISURA COHESIVA

El modelo cohesivo o la teoría de la fisura cohesiva surge en los años sesenta cuando Dugdale [4] y Barenblat [5] la utilizaron para analizar de forma

simplificada mecanismos que eliminaran la singularidad existente en el fondo de una fisura. Una década después Hillerborg [6] generalizó la teoría a cualquier sólido incluso a geometrías sin fisura donde no hay singularidad, y en los últimos años ha sido desarrollada, mejorada y aplicada ampliamente, sobre todo a materiales cuasifrágiles como el hormigón y las cerámicas [7-9].

La teoría de la fisura cohesiva, simplifica los fenómenos físicos que tienen lugar en la zona de fractura, modelizándolos como una fisura que transmite cargas entre sus labios. Según el modelo, las tensiones transmitidas están relacionadas con la separación de los labios de la fisura a través de una función del material denominada curva de ablandamiento.

La fisuración cohesiva se inicia donde la tensión principal mayor alcanza un valor crítico f_t, denominado resistencia cohesiva. Alcanzado este valor se genera una fisura cohesiva en el plano perpendicular a la dirección de dicha tensión principal mayor. La tensión transmitida σ es igual a la resistencia cohesiva en el instante inicial, y varía al aumentar el desplazamiento w entre los labios de la fisura, hasta anularse cuando se alcanza el valor w_c. En este momento cesa la transferencia de cargas y se forma una fisura verdadera. El área bajo la curva de ablandamiento es la energía específica de fractura G_F definida en la expresión (2) y coincide con el trabajo necesario para abrir monótonamente una unidad de área de grieta.

$$G_F = \int_0^{w_c} \sigma \, dw = \int_0^{w_c} f(w) \, dw \qquad (2)$$

$\sigma = f(w)$ es la curva de ablandamiento del material. Una magnitud importante dentro de la teoría es la longitud característica l_{ch} definida por:

$$l_{ch} = \frac{E G_F}{f_t^2} \qquad (3)$$

La teoría distingue dos zonas: la zona cohesiva y el resto del material. El comportamiento de la zona cohesiva está gobernado por la curva de ablandamiento mientras que el del resto del material por la ecuación constitutiva.

En este trabajo se ha empleado una curva de ablandamiento rectangular dependiente de dos parámetros: la energía de fractura G_F y la resistencia cohesiva f_t. La tensión transmitida por la fisura es siempre constante igual al valor de la resistencia cohesiva f_t,. En el resto del material se ha utilizado una ecuación constitutiva elástica, lineal e isótropa.

El comportamiento en rotura de sólidos entallados se puede predecir implementando el modelo cohesivo en un código de elementos finitos. El procedimiento y los detalles de los cálculos están descritos en otros trabajos de los autores [10, 11].

Se han analizado sólidos entallados de varios materiales PMMA, PVC y aluminio. Los resultados experimentales de fractura de geometrías entalladas de PMMA así como las propiedades mecánicas del material se pueden encontrar en las publicaciones de Dunn [12], Gómez [3] y Seweryn [13]. Las propiedades mecánicas obtenidas por Seweryn difieren ligeramente de las obtenidas por Dunn y Gómez, por lo que se han considerado de forma separada. Se han estudiado cuatro variedades de espuma de PVC con distinta densidad cuyas propiedades y ensayos de fractura aparecen en el trabajo de Grenestedt [14], y junto a estos dos polímeros se ha analizado un metal, aluminio cuyas propiedades se encuentran en el artículo de Seweryn [13]. Los valores empleados en los cálculos junto al módulo de elasticidad del material aparecen en la tabla 1.

Tabla 1. Propiedades mecánicas.

	E (GPa)	G_F (N/m)	f_t (MPa)
PMMA (Gómez)	3.00	393	104.7
PMMA (Seweryn)	2.30	115.7	124
PVC H80	85	210	2.51
PVC H100	125	470	4.02
PVC H130	175	610	5.70
PVC H200	310	630	9.38
Aluminio	70	365	705

El resultado del cálculo numérico es la carga máxima que soporta un sólido entallado. La tenacidad generalizada se obtiene sustituyendo la carga numérica en la siguiente expresión:

$$K_{IC}^{V} = P_{MAX} B^{-1} D^{-\lambda} h(\beta, \text{solicitación}, \text{dimensiones}) \qquad (4)$$

B y D son dos dimensiones del sólido y h es una función de forma que depende del ángulo de entalla, del tipo de solicitación y de las dimensiones del sólido. Las unidades de la tenacidad generalizada son MPa $m^{1-\lambda}$, λ es un autovalor función del ángulo de entalla que se obtiene resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sin(\lambda(2\pi - \beta)) + \lambda \sin(2\pi - \beta) = 0 \qquad (5)$$

Los resultados numéricos y los valores experimentales de la tenacidad generalizada se han representado en la figura 1, donde aparecen todos los materiales analizados PMMA, PVC de distintas densidades y aluminio.

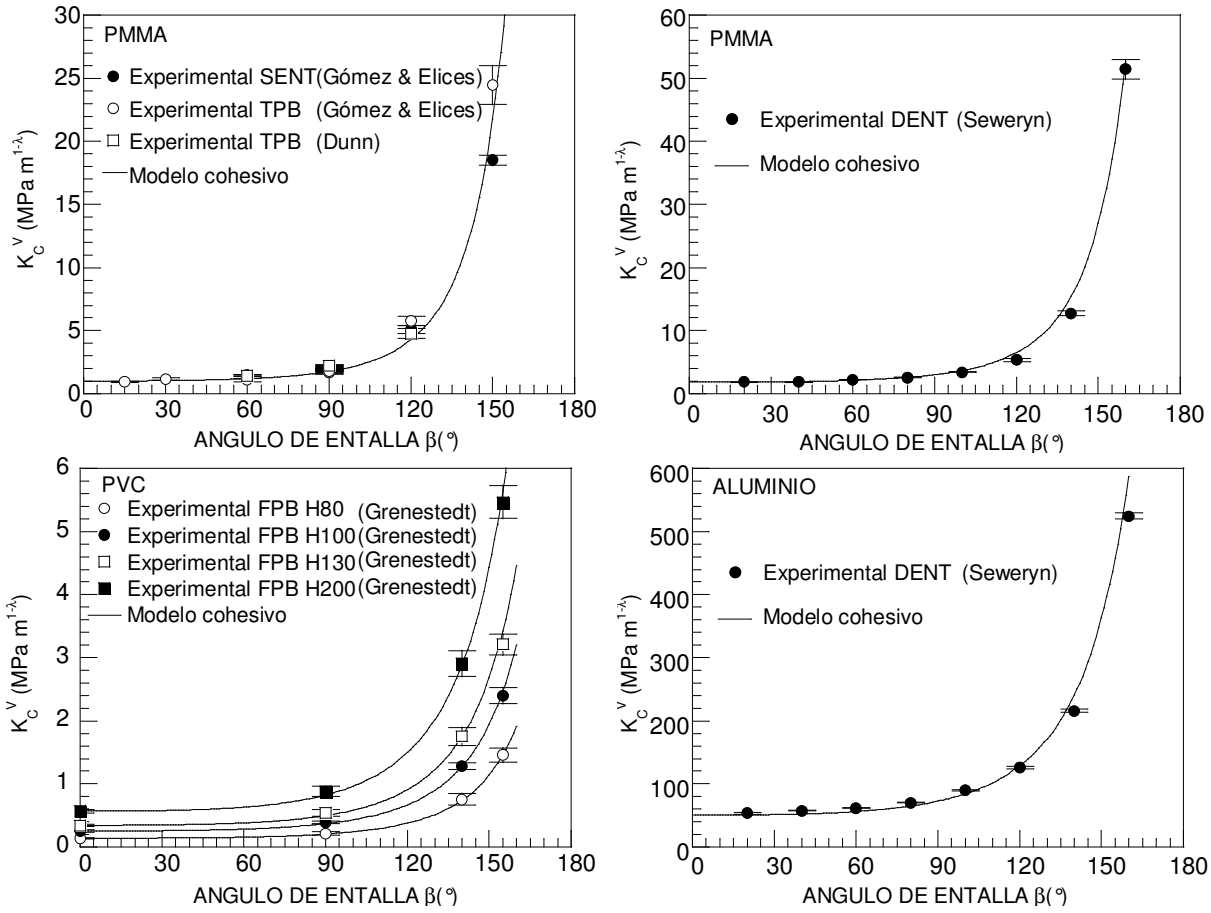


Fig. 1. Tenacidad generalizada obtenida experimentalmente y según la teoría de la fisura cohesiva.

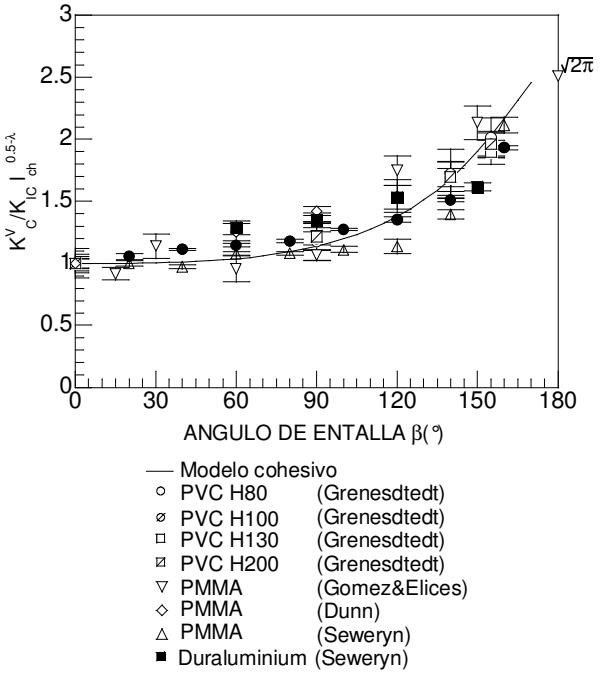


Fig. 2. Tenacidad generalizada adimensionalizada.

Adimensionalizando la tenacidad generalizada según la expresión (6) se obtiene una función única, en torno a la cual se agrupan todos los resultados experimentales (fig 2).

$$\frac{K_{IC}^{V}}{K_{IC} l_{ch}^{0.5-\lambda}} = \hat{f}(\beta) \tag{6}$$

La expresión (6) establece un criterio de rotura en entallas en V, según el cual la rotura se produce cuando el factor de intensidad de tensiones generalizado K_I^V alcanza un valor crítico igual al producto de la tenacidad del material K_{IC}, por la longitud característica l_{ch} elevada a $0.5-\lambda$ y por un factor dependiente del ángulo de entalla β.

$$K_I^V = K_{IC} l_{ch}^{0.5-\lambda} \hat{f}(\beta) \tag{7}$$

Este criterio obtenido de forma experimental se puede justificar analíticamente a partir de la teoría de la fisura cohesiva en sólidos entallados en V cuyas dimensiones son muy superiores a la longitud característica del material.

3. JUSTIFICACIÓN DEL CRITERIO DE ROTURA

Cuando la curva de ablandamiento es rectangular, la tensión en la zona cohesiva toma un valor constante igual a f_t y la carga máxima se alcanza cuando el

desplazamiento en la raíz de la entalla alcanza un valor crítico w_c.

$$w_c = \frac{G_F}{f_t} \tag{8}$$

El desplazamiento en la raíz de la entalla se puede calcular siguiendo el procedimiento descrito por Planas, Guinea y Elices [15, 16]. El estado de cargas que actúan sobre una probeta entallada con una fisura cohesiva de tamaño a se puede considerar como una carga exterior P y una carga por unidad de área f_t sobre la fisura cohesiva como se indica en la figura. Aplicando el principio de superposición, este estado inicial se descompone en un sólido entallado con una fisura real con carga exterior P, más un estado con la carga f_t en los labios de la fisura.

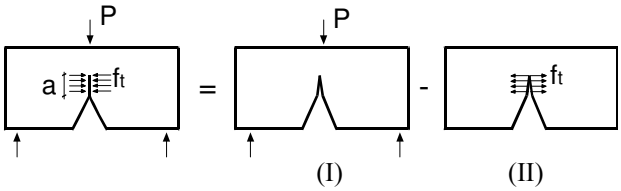


Fig. 3. Superposición de estados

El desplazamiento de los labios de la fisura cohesiva w a una distancia x de la raíz de la entalla es igual al desplazamiento del estado I $w^{(I)}$ más el desplazamiento del estado II $w^{(II)}$. Para calcular $w^{(I)}$ se ha seguido el procedimiento aproximado de Petroski, [17] según el cual el desplazamiento de los labios de la fisura en el estado I es igual a

$$w^{(I)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{K_I^{(I)}}{E'}\left(4(a-x)^{\frac{1}{2}} + \hat{g}\frac{(a-x)^{\frac{3}{2}}}{a}\right) \tag{9}$$

donde E´ es el módulo de elasticidad generalizado, $K_I^{(I)}$ es el factor de intensidad de tensiones correspondiente al estado I, y $\hat{g}$ es una función incógnita adimensional que se obtiene imponiendo la siguiente condición

$$\int_0^a \left[K_I^{(I)}(a)\right]^2 da = \frac{1}{2}E'\int_0^a \sigma(x)\, w^{(I)}(x)\, dx \tag{10}$$

siendo $\sigma(x)$ la tensión que actuando sobre los labios de la fisura produce el mismo factor de intensidad de intensidad de tensiones que el estado I. Cuando el tamaño de la zona cohesiva es pequeño comparado con el resto de dimensiones del sólido esta distribución tensional es el primer término del desarrollo en serie de Williams [18].

$$\sigma(x) = \frac{K_I^V}{\sqrt{2\pi}}x^{\lambda-1} \tag{11}$$

$K_I^{(I)}$ es el factor de intensidad de tensiones de una fisura en la raíz de una entalla en V. Si el tamaño de la fisura es suficientemente pequeño se puede calcular a partir de la expresión de Gallagher [19]

$$K_I^{(I)} = K_I^V a^{\lambda-1/2}\hat{k}_1(\beta) \tag{12}$$

$\hat{k}_1$ es una función universal que sólo depende del ángulo de entalla β. Sustituyendo el factor de intensidad de tensiones (12), la distribución de tensiones en el ligamento de la entalla (11) y la expresión del campo de desplazamientos aproximado (9) en (10) se obtiene la función $\hat{g}$

$$\hat{g} = \hat{g}(\beta) = \frac{\frac{\pi}{\lambda}\hat{k}_1(\beta) - 4\int_0^1 \xi^{\lambda-1}(1-\xi)^{\frac{1}{2}}d\xi}{\int_0^1 \xi^{\lambda-1}(1-\xi)^{\frac{3}{2}}d\xi} \tag{13}$$

donde se ha sustituido $\xi = x/a$. Se observa que la función $\hat{g}$ sólo depende del ángulo de entalla β. El desplazamiento en la raíz de la entalla del estado I queda

$$w^{(I)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{K_I^V a^\lambda \hat{k}_1(\beta)}{E'}(4+\hat{g}) \tag{14}$$

El desplazamiento $w^{(II)}$ se ha obtenido a partir de la función de peso $h(x,a)$ deducida empleando el método de Bueckner.

$$h(x,a) = \frac{E'}{2\,K_I^{(I)}}\frac{\partial w^{(I)}}{\partial a}(x) \tag{15}$$

Sustituyendo la expresión del factor de intensidad de tensiones y el campo de desplazamientos del estado I la función de peso queda:

$$h(x,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\left(\lambda\left(4(1-\xi)^{\frac{1}{2}} + \hat{g}(1-\xi)^{\frac{3}{2}}\right) + \xi\left(2(1-\xi)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\hat{g}(1-\xi)^{\frac{1}{2}}\right)\right) = \frac{1}{a^{1/2}}\hat{m}(\beta,\xi) \tag{16}$$

Con esta función, se calcula el factor de intensidad de tensiones correspondiente al estado II

$$K_I^{(II)} = \int_0^a h(x',a)\,f_t\,dx' = f_t\int_0^1 a^{1/2}\hat{m}(\beta,\xi')\,d\xi' \tag{17}$$

donde se ha sustituido $\xi' = x'/a$. El desplazamiento de la raíz de la entalla del estado II se puede obtener a partir de la siguiente expresión [15, 16]

$$w^{(II)} = 2\int_0^a C_{0x'}(a)\,f_t\,b\,dx' \tag{18}$$

b es el espesor y $C_{0x'}$ es igual al desplazamiento en la raíz de la entalla que produce una carga puntual en x', que se calcula imponiendo la siguiente condición [20]

$$\frac{dC_{0x'}}{da} = \frac{2b}{E'}\frac{K_{I0}K_{Ix'}}{P_0P_{x'}} \tag{19}$$

donde K_{I0} y $K_{IX'}$ son los factores de intensidad de tensiones correspondientes a una carga puntual de valor P_0 y $P_{X'}$ situada en la raíz de la entalla y en x' respectivamente. Calculando los factores de intensidad de tensiones a partir de la función de peso (16) y sustituyendo en (19)

$$C_{0x'}(a) = \frac{1}{bE'}\int_{x'}^{a}\frac{1}{a'}\hat{m}(\beta,0)\hat{m}\left(\beta,\frac{x'}{a'}\right)da' \qquad (20)$$

Integrando, operando y sustituyendo, el desplazamiento del estado II queda

$$w^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\ f_t}{E'}\lambda\left(4+\hat{g}(\beta)\right)\int_0^1\hat{m}(\beta,\xi')d\xi' \qquad (21)$$

Calculados las desplazamientos y los factores de intensidad de tensiones de los dos estados, el desplazamiento en los labios de la fisura y el factor de intensidad de tensiones del estado inicial son

$$w = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{E'}(4+\hat{g})\left(K_I^V a^{\lambda}\hat{k}_1(\beta) - a\ f_t\lambda\int_0^1\hat{m}(\beta,\xi')d\xi'\right) \qquad (22)$$

$$K_I = K_I^V a^{\lambda-1/2}\hat{k}^{(1)}(\beta) - f_t a^{1/2}\int_0^1\hat{m}(\beta,\xi')d\xi' \qquad (23)$$

La tensión en las proximidades de la fisura cohesiva es finita por lo que el factor de intensidad de tensiones debe ser cero, lo cual permite despejar el factor de intensidad de tensiones generalizado K_I^V

$$K_I^V = \frac{f_t}{a^{\lambda-1}\hat{k}_1(\beta)}\int_0^1\hat{m}(\beta,\xi')d\xi' \qquad (24)$$

Sustituyendo en (22) la expresión (24) junto al valor crítico (8) queda

$$\frac{G_F}{f_t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\ f_t}{E'}(4+\hat{g})(1-\lambda)\int_0^1\hat{m}(\beta,\xi')d\xi' \qquad (25)$$

despejando se obtiene el valor del tamaño de la zona cohesiva en el instante de rotura.

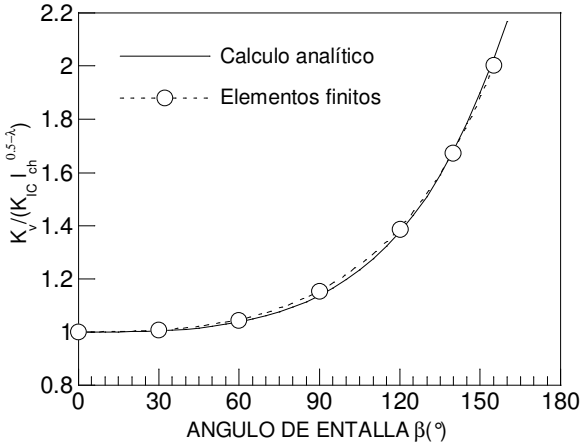


Fig. 4. Curva adimensional analítica y numérica.

$$a = l_{ch}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}(4+\hat{g})(1-\lambda)\int_0^1\hat{m}(\beta,\xi')d\xi'} \qquad (26)$$

Entrando en (24) y adimensionalizando se obtiene la expresión del criterio de rotura buscado.

$$\frac{K_{IC}^V}{K_{IC}l_{ch}^{0.5-\lambda}} = \frac{\int_0^1\hat{m}(\beta,\xi')d\xi'}{\hat{k}_1(\beta)}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}(4+\hat{g})(1-\lambda)\int_0^1\hat{m}(\beta,\xi')d\xi'}\right)^{1-\lambda} \qquad (27)$$

Comparando la curva obtenida con la curva numérica de la figura 2 se observa que coinciden en todo el intervalo de ángulos analizado.

4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El criterio de rotura propuesto se ha justificado empleando dos hipótesis de comportamiento del material: rotura en régimen elástico lineal e isótropo y longitud característica inferior a las dimensiones de las geometrías entalladas. La primera hipótesis se cumple en todos los materiales analizados como aparece en los artículos [3, 12, 13, 14]. La tabla 2 recoge el valor de la longitud característica y el canto de las geometrías entalladas objeto de estudio D. Se observa que en todos los casos la longitud característica es uno o dos ordenes de magnitud inferior a las dimensiones del sólido.

Tabla 2. Longitud característica y dimensiones de las geometrías analizadas.

	l_{ch} (mm)	D (mm)
PMMA (Gómez)	0.10	28
PMMA (Seweryn)	0.23	109
PVC H80	3.11	50
PVC H100	4.18	50
PVC H130	3.56	50
PVC H200	3.69	50
Aluminio	5.14	109

Para facilitar la aplicación práctica del criterio de rotura, la curva analítica obtenida se puede aproximar a un polinomio que tome en el origen el valor 1 con derivada inicial nula y el ángulo de entalla en radianes.

$$\frac{K_v}{f_t l_{ch}^{1-\lambda}} = 1 + 0.038393\,\beta^2 - 0.027857\,\beta^3 + 0.024207\,\beta^4 \qquad (28)$$

El ajuste se ha realizado en los valores que aparecen en la gráfica 4, es decir entre 0º y 160º.

En resumen, la teoría de la fisura cohesiva permite predecir la carga de rotura de sólidos entallados en V de gran tamaño sin necesidad de realizar cálculos

numéricos, sólo son necesarios el valor de la tenacidad del material y de la resistencia cohesiva f_t.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación del Fondo Europeo de Desarrollo Regional de la Unión Europea (proyecto FEDER UNPM00-33-003 y FEDER UNPM00-33-004).

REFERENCIAS

[1] Carpinteri, A. "Stress singularity and generalized fracture touhgness at the vertex of re-entrant corners", Engineering Fracture Mechanics. **26**, 143-155 (1987).

[2] Knésl, Z. "A criterion of V-notch stability", International Journal of Fracture. **48**, R79-R83 (1991).

[3] Gómez, F.J y Elices, M. "A fracture criterion for sharp V-notch samples", International Journal of Fracture. En imprenta (2003)

[4] Dugdale D.S., "Yielding of steel sheets containing slits", Journal of Mechanics and Physics of Solids. **8**, 100-108. (1960)

[5] Barenblatt G.I. "The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture". Advance Applied Mechanics. **7**, 55-129. (1962)

[6] Hillerborg A., Modéer M. and Petersson P.E. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements". Cement Concrete Res. **6**, 773-782. (1976).

[7] Elices M. y Planas J., "Material models". Fracture Mechanics of Concrete Structures. L. Elfgren Ed., Chapman and Hall, London, 16-66. (1989)

[8] Elices M., Planas J. y Guinea G.V. "Modeling cracking in rocks and cementitious materials". Fracture and Damage of Concrete and Rock, H.P. Rossmanith Ed., E & FN Spon, London, 3-33. (1993).

[9] Planas J., Elices M. y Guinea G.V. "Cohesive cracks as a solution of a class of nonlocal models". Fracture and Damage of Quasibrittle Structures, Z.P. Bazant, Z. Bittnar, M. Jirásek and J. Mazars Eds., E & FN Spon, London, 131-144. (1994)

[10] Gómez F.J.., "Un criterio de rotura en sólidos entallados", Tesis Doctoral, Departamento de Ciencia de Materiales, UPM (1998).

[11] Gómez F.J., Elices M. y Valiente A. "Cracking in PMMA containing U-shaped notches", Fatigue Fracture Engineering Material and Structures. **23**, 795-803 (2000).

[12] Dunn, M.L., Suwito, W. and Cunningham, S.J. "Fracture initiation at sharp notches: Correlation using critical stress intensities. International Journal of Solids and Structures. **34**, 3873-3883 (1997)

[13] Seweryn, A. "Brittle fracture criterion for structures with sharp notches", Engineering Fracture Mechanics. **47** 673-681, 1994.

[14] Grenestedt, J.L., Hallström, S. and Kuttenkeuler, J. "On cracks emanating from wedges in expanded PVC foam" Engineering Fracture Mechanics, **54**. 445-456 (1996).

[15] Planas J., Guinea G.V. y Elices M. "Integral equation method for modeling cracking in concrete" Capítulo 4 en Computational Fracture in Concrete Technology, M. H. Aliabadi and A. Carpinteri Eds., WIT Press, Boston, Southampton, 103-132. (1994).

[16] Bazant Z.P. y Planas J., "Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials". CRC Press. Boca Ratón, FL. U.S.A. (1998).

[17] Petroski H.J. y Achenbach J.D., "Computation of the weight function from a stress intensity factor", Engineering Fracture Mechanics. **10**, 257-266 (1978)

[18] Williams, M.L. "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", Journal of Applied Mechanics. **19**, 526-528 (1952).

[19] Gallagher, D. "A crack at the apex of a V-shaped notch" International Journal of Fracture. 69, R81-R87 (1995).

[20] Elices M., "Mecánica de la Fractura aplicada a sólidos elásticos bidimensionales", Departamento de Ciencia de Materiales. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. U.P.M. (1996).